

Fungsi Gelombang Persamaan Dirac Pada Kasus Spin Simetri Bagian Sudut menggunakan Metode Iterasi Asimtotik

Dirac Equation Wave Function in the Case of Angular Part Symmetry Spin using Asymptotic Iteration Method

Yuniar Alam¹, Nining Haryuni², Wahyu Dwi Handoko³, Nurhadi⁴

^{1,3,4}Program Studi Fisika, Fakultas Ilmu Eksakta, Universitas Nahdlatul Ulama Blitar

²Program Studi Peternakan, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Madani Indonesia

email: ^{1*}yuniaralam@unublitar.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan fungsi gelombang pada kasus spin simetri bagian sudut. Proses penyelesaian persamaan Dirac yaitu dengan mensubstitusi potensial kombinasi, dimana hasilnya ditunjukkan pada Persamaan 35 untuk kasus spin simetri. Langkah selanjutnya adalah melakukan pemisahan variabel persamaan Dirac menjadi bagian sudut. Setelah dilakukan pemisahan variabel, selanjutnya dilakukan substitusi variabel yang sesuai sehingga diperoleh persamaan differensial orde dua. persamaan differensial orde dua tersebut yang nantinya akan ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan tipe metode iterasi asimtotik untuk selanjutnya bisa dicari penyelesaiannya berdasarkan metode Iterasi Asimtotik. Penyelesaian persamaan Dirac dengan menggunakan metode Iterasi Asimtotik dilakukan dengan mereduksi persamaan differensial orde kedua dengan cara substitusi variabel sehingga diperoleh persamaan fungsi gelombang. Persamaan Dirac diselesaikan dengan menggunakan Mekanika Kuantum. Fungsi gelombang diperoleh dengan sifat invarian bentuk dan fungsi gelombang. Penelitian ini dibatasi untuk kasus spin simetri bagian sudut.

Kata Kunci: Persamaan Dirac, Spin Simetri, Metode Iterasi Asimtotik.

Abstrack

This study aims to determine the wave function in the case of spin symmetry of the angular part. The process of solving the Dirac equation is by substituting the combination potential, where the results are shown in Equation 35 for the case of spin symmetry. The next step is to separate the Dirac equation variables into angular parts. After separating the variables, then the appropriate variable substitution is carried out so that a second-order differential equation is obtained. The second-order differential equation will later be transformed into the form of an equation type of the asymptotic iteration method and then the solution can be found based on the Asymptotic Iteration method. The solution of the Dirac equation using the Asymptotic Iteration method is done by reducing the second-order differential equation by substituting variables so that the wave function equation is obtained. The Dirac equation is solved using Quantum Mechanics. The wave function is obtained by the invariant nature of the shape and wave function. This research is limited to the case of spin symmetry of the angular part.

Keywords: Dirac Equation, Spin Symmetry, Asymptotic Iteration Method (AIM)

PENDAHULUAN

Paul Dirac meneliti persamaan gelombang kovarian relativistik yang dikenal dengan persamaan Dirac ditahun 1928 [1]. Persamaan Dirac mendeskripsikan dasar koresponden untuk partikel spin elementer $\frac{1}{2}$ yaitu seperti pada sebuah electron [10]. Persamaan Dirac konsisten dengan kedua prinsip mekanika kuantum dan teori relativitas khusus [6]. Efek spin akan terlihat ketika suatu partikel bergerak dengan kecepatan mendekati cahaya, hal ini dikarenakan efek spin terlihat ketika partikel bergerak pada medan magnetik dan homogen dan akan menyebabkan munculnya momen magnetik akibat rotasi partikel bermuatan terhadap sumbunya [1]. persamaan Dirac sendiri, digunakan untuk menggambarkan gerak partikel ber-spin kelipatan $\frac{1}{2}$ atau disebut fermion [2].

Pengubahan variabel menjadi operator dilakukan dengan menggunakan definisi persamaan gelombang elektromagnetik, ($\mathbf{x}$ adalah posisi dan t waktu) :

$$\psi = \psi_o \sin(kx - \omega t) = \psi_o e^{i(kx - \omega t)}$$

Penyelesaian persamaan Dirac secara langsung dari sistem partikel dengan menentukan energi dan fungsi gelombang suatu partikel [9] dipengaruhi oleh potensial yang energi potensialnya merupakan fungsi posisi [3]. Penyelesaian persamaan Dirac dapat diselesaikan dengan cara mereduksi persamaan Dirac menjadi persamaan Differensial Orde Dua [4]. Terdapat beberapa tipe potensial dalam kuantum untuk menggambarkan dinamika partikel di mekanika kuantum. Beberapa contoh dari potensial tersebut adalah potensial Coloumb, Morse, Rosen-Morse, Manning Rosen, kelompok Poschl-Teller, kelompok Gendensthein, Symetrical Top, Eckart, Scraft dan Kepler dalam hypersphere [5].

METODE PENELITIAN

Metode iterasi asimtotik adalah metode yang di gunakan untuk memperoleh solusi eksak dari differensial homogen linier orde dua:

$$y_n''(x) - \lambda_o(x)y_n'(x) + s_o(x)y_n(x) = 0 \quad (1)$$

Dimana $\lambda_o \neq 0$ dan turunan pertama menunjukkan hubungan dengan x, parameter lain yaitu n diartikan sebagai sebuah bilangan kuantum radial. Untuk memperoleh sebuah solusi umum pada persamaan ini, didiferensialkan Persamaan (1) yang bergantung terhadap x, diperoleh

$$y_n''' = \lambda_1(x) + s_1(x)y_n(x) \quad (2)$$

Jika didefinisikan

$$\lambda_1(x) = \lambda_o'(x) + s_o(x) + \lambda_o^2(x) \quad (3)$$

$$s_1(x) = s_o'(x) + s_o(x) + \lambda_o(x) \quad (4)$$

dengan $\lambda_o(x) \neq 0$ dan $s_o(x)$ merupakan fungsi dari ∞ (koefisien persamaan diferensial). Metode iterasi asimtotik diaplikasikan secara langsung pada beberapa permasalahan jika sebuah fungsi gelombang diketahui terlebih dahulu dan memenuhi kondisi batas nol (0) dan titik tak hingga (∞).

Persamaan (1) dapat dengan mudah diiterasikan sampai $(k+1)$ dan $(k+2)$, $k=1,2,3, \dots$ sehingga diperoleh

$$y_n^{k+1}(x) = \lambda_{k-1}'(x)y_n'(x) + s_{k-1}(x)y_n(x) \quad (5)$$

$$y_n^{k+2}(x) = \lambda_k'(x)y_n'(x) + s_k(x)y_n(x) \quad (6)$$

Dengan

$$\lambda_k(x) = \lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_o(x)\lambda_{k-1}(x) \quad (7)$$

$$s_k(x) = s_{k-1}'(x) + s_o(x)s_{k-1}(x) \quad (8)$$

Yang disebut *recurrence relation*. Dari rasio $(k+1)$ dan $(k+2)$, didapatkan persamaan

$$\frac{d}{dz} \ln[y_n^{(k+1)}(z)] = \frac{y_n^{(k+2)}(z)}{y_n^{(k+1)}(z)} = \frac{\lambda_k(z) \left[y_n' + \frac{s_k(z)}{\lambda_k(x)} f(z) \right]}{\lambda_{k-1}(z) \left[y_n' + \frac{s_{k-1}(z)}{\lambda_{k-1}(x)} f(z) \right]} \quad (9)$$

Untuk k cukup besar, jika

$$\frac{s_k(z)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(z)}{\lambda_{k-1}(x)} = \alpha(z) \quad (10)$$

Yang merupakan aspek metode asimtotik, kemudian disubsitusikan

$$\frac{d}{dz} \ln[y_n^{(k+1)}(z)] = \frac{\lambda_k(z)}{\lambda_{k-1}(z)} \quad (11)$$

$$y_n^{(k+1)}(z) = C_1 \exp\left(\int \frac{\lambda_k(z)}{\lambda_{k-1}(z)} dz\right) = \quad (12)$$

$$C_1 \lambda_{k-1}(z) \exp\left(\int [\alpha(z) + \lambda_o(z)] dz\right) \\ y_n(z) + \alpha(z) f(z) = \quad (13)$$

$$C_1 \exp\left(\int [\alpha(z) + \lambda_o(z)] dz\right) \\ y_n(z) = \exp\left(-\int^z \alpha(z_1) dz_1\right) \quad (14)$$

$$\left[C_2 + C_2 \int^z \exp\left(\int^{z_1} [\lambda_o(z_2) + 2\alpha(z_2)] dz_2\right) dz_1\right] \\ \Delta_k(z) = \lambda_k(z) s_{k-1}(z) - \lambda_{k-1}(z) s_k(z) = 0 \quad (15)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$y_n(z) = C_2 \exp\left(-\int^z \frac{s_n(z_1)}{\lambda_n(z_1)} dz_1\right) \quad (16)$$

Persamaan (16) merupakan penyelesaian dari persamaan (1) yang akan digunakan untuk menentukan fungsi gelombang persamaan Dirac.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Schrodinger relativistik disebut sebagai persamaan Klien Gordon untuk spin bilangan bulat dan persamaan Dirac untuk spin $\frac{1}{2}$ [4][6]. Deskripsi secara kuantitatif gerak partikel relativistik yang dipengaruhi oleh gaya medan yang direpresentasikan [8] sebagai energi potensial partikel yang berspin $\frac{1}{2}$ tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial yang disebut sebagai persamaan Dirac [7]. Persamaan Dirac untuk potensial vektor $V(r)$ dan skalar $S(r)$ dituliskan sebagai berikut:

$$\{c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(Mc^2 + s(r))\}\psi(r) = \\ \{E - v(r)\}\psi(r) \quad (17)$$

Dengan M massa relativistik partikel, E energi total, dan $\vec{p}$ operator momentum linier, nilai α dan β dinyatakan dalam persamaan

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Dengan $\vec{\alpha}$ matrik Pauli I matrik identitas 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Spin dirac dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} f_{nk}(r) \\ g_{nk}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^l(\theta, \varphi) \\ i \frac{G_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Dengan $F_{nk}(r)$ adalah komponen spin dirac *upper* dan $G_{nk}(r)$ adalah komponen pseudospin Dirac *lower*. $Y_{jm}^l(\theta, \varphi)$ adalah spin bola harmonik, l adalah bilangan kuantum orbital dan $\bar{l}$ adalah bilangan kuantum pseudospin orbital, m adalah proyeksi momentum sudut pada sumbu z.

Dengan substitusi persamaan (21) kedalam persamaan (17), diperoleh

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F_{nk}(r) = \quad (22)$$

$$(E - V(\vec{r}) + Mc^2 + S(\vec{r})) G_{nk}(r) \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) G_{nk}(r) = \quad (23)$$

$(E - V(\vec{r}) - Mc^2 - S(\vec{r})) F_{nk}(r)$
Setelah eliminasi $F_{nk}(r)$ dan $G_{nk}(r)$ dari persamaan (22) dan persamaan (23), diperoleh dua persamaan diferensial yang mirip dengan persamaan schrodinger untuk komponen $F_{nk}(r)$ dan komponen $G_{nk}(r)$.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} \right) F_{nk}(r) + (E + Mc^2) \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F_{nk}(r) = \quad (24)$$

$$[(E + Mc^2)(E - Mc^2)] F_{nk}(r) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} \right) G_{nk}(r) + (Mc^2 + E) \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) G_{nk}(r) = \quad (25)$$

$$[(E - 2V(\vec{r}) - Mc^2)(E - Mc^2)] G_{nk}(r) \\ \text{Dengan } S(\vec{r}) = V(\vec{r}) \quad (26)$$

Untuk simetri spin eksak, terjadi ketika potensial vektor $V(r)$ = potensial skalar $S(r)$

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} g_{nk}(r) = [E - 2V(\vec{r}) - Mc^2] f_{nk}(r) \quad (27)$$

Persamaan (2.6) menjadi

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} f_{nk}(r) = [E + Mc^2] g_{nk}(r) \quad (28)$$

Persamaan (27) disubstitusikan

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) f_{nk}(r) = [E + M][E - M] f_{nk}(r) - 2V(\vec{r})[E + M] f_{nk}(r) \quad (29)$$

persamaan Dirac untuk kasus spin simetri dimana $\vec{\sigma}$ adalah operator lapisan untuk koordinat kartesian. Untuk menggeneralisasi sistem 3 dimensi ke sistem D dimensi kita mengaplikasikan laplacian D dimensi yang dituliskan

$$\left[\frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4} \left\{ \frac{1}{\sin \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \right\} + \frac{1}{\sin^2 \theta_4} \left\{ \frac{1}{\sin \theta_3} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_3} \sin^2 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \right\} \right\} \right] f_{nk}(r) + \left[E^2 - M^2 \right] - 2V(\vec{r})[E + M] f_{nk}(r) = 0 \quad (30)$$

Persamaan dirac kasus spin simetri bagian sudut dikalikan $Y(\hat{x})$, maka diperoleh

$$\left[\frac{1}{\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4} \left\{ \frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \right\} + \frac{1}{\sin^2 \theta_4} \left\{ \frac{1}{\sin \theta_3} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_3} \sin^2 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \right\} \right] Y_1(\theta_1) Y(\theta_2, \theta_3) - [E + M] \left[\frac{V(\theta_1)}{\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4} + \frac{V(\theta_2)}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4} + \frac{V(\theta_3)}{\sin^2 \theta_4} \right] Y_1(\theta_1) Y(\theta_2, \theta_3) = -\lambda_{D-1} Y_1(\theta_1) Y(\theta_2, \theta_3) \quad 31$$

persamaan differensial orde dua, paling tidak memiliki dua titik regular singular dititik $z = 0$ dan $z = 1$. Penyelesaian pendekatan untuk persamaan

$$z_1(1-z_1)f_s''(z_1) + [(2\alpha+1) - z_1(2\alpha+2\beta+2)]f_s'(z_1) + ([E+M]v(v+1) - (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1))f_s(z_1) = 0 \quad 32$$

selanjutnya untuk penyelesaian menggunakan Asymptotic Iteration Method (AIM), degan

mengalikan $\frac{1}{z_1(1-z_1)}$ Persamaan (32) dapat direduksi kedalam bentuk persamaan differensial orde kedua tipe AIM yang di tuliskan

$$s_1 = \left[-\frac{C}{z_1^2} + \frac{C}{(1-z_1)^2} \right] + \left[\frac{C}{z_1} + \frac{C}{(1-z_1)} \right] + \left[-\frac{(2\alpha+1)}{z_1} + \frac{(2\beta+1)}{(1-z_1)} \right] \quad 33$$

Dengan nilai $Y_1(z_1)$ sebagai berikut

$$Y_1(z_1) = z_1^\alpha (1-z_1)^\beta (-1)^{n_r} C'(-1)^{n_r} (2\alpha+1)_2 F_1(-n_r, 2\alpha+2\beta+1+n_r, 2\alpha+1, z_1) \quad 34$$

Maka, fungsi gelombang total adalah

$${}_2F_1(-n_r, 2\alpha + 2\beta + 1 + n_r, 2\alpha + 1, z_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-n_r)_n (2\alpha + 2\beta + 1 + n_r)_n \left(\frac{1 - \cot_q \theta_3}{2} \right)^n}{(2\alpha + 1)_n n_r!} \quad 35$$

C adalah konstanta normalisasi untuk bagian polar, sedangkan ${}_2F_1$ merupakan fungsi hipergeometri.

KESIMPULAN

Efek spin akan terlihat ketika partikel bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, akibat adanya medan magnetik homogen yang menyebabkan munculnya momen magnetik akibat rotasi partikel tersebut terhadap sumbunya. Spin menyatakan momentum sudut intrinsik partikel. Fungsi gelombang radial ditunjukkan pada Persamaan (35), menunjukkan partikel semakin jauh dari pusat atom akibat energi ikat. Secara umum ditunjukkan bahwa gangguan yang dilakukan mengakibatkan perubahan pada fungsi gelombang.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Greiner, A. 2000. Relativistic Quantum Mechanics. Tihrd Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [2] Suparmi, A., Permatahati, L.K., Marzuki, A. et al. (2024). Study of the fractional Schrödinger equation with Morse potential and the optical properties of quantum dots under the magnetic field. Eur. Phys. J. Plus 139, 529. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-05323-8>
- [3] Suparmi, A., Maria, S., & Cari., C. (2024). Study of the non-relativistic energy spectra of hyperbolic function position dependent mass with Modified Hyperbolic Pöschl Teller potential under AB force. AIP Conf. Proc. 3074, 070006. <https://doi.org/10.1063/5.0211727>
- [4] Alam, Y., Suparmi, Cari, & Anwar, F. (2016). Analysis of D Dimensional Dirac equation for q-deformed Posch-Teller combined with q-deformed trigonometric Manning Rosen Non-Central potential using Asymptotic Iteration Method (AIM). Journal of Physics: Conference Series, 776(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/776/1/012082>
- [5] Alam, Yuniar. (2015). Solusi Persamaan Dirac Bagian Radial Pada Kasus Pseudospin Simetri Untuk Potensial Posch-Teller Hiperbolik Terdeformasi-Q Menggunakan Metode Iterasi Asimtotik. Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Sains, (5), 2015–2601.
- [6] Alam, Y., & Hariyanto, Y. A. . (2022). Dirac Equation for Posch-Teller Potential in Radial Section Symmetry Spin Case using Asymptotic Iteration Method. Proceedings of the International Seminar on Business, Education and Science, 1(1), 88–97. <https://doi.org/10.29407/int.v1i1.2658>
- [7] Yordanov, V. Derivation of Dirac equation from the stochastic optimal control principles of quantum mechanics. (2024). Sci Rep 14, 6507. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-56582-5>
- [8] Saito, Shinichi. (2024). "Dirac equation for photons in a fibre: Origin of polarisation." Heliyon 10.7.

- [9] Li, Mingjie., & Horsley, SAR.(2024) The electronic and electromagnetic Dirac equations. *New Journal of Physics*, 26.2: 023007.
- [10] Chamizo, Fernando., & Santillán, Osvaldo P. Exact quantum revivals for the Dirac equation. *Physical Review A*, 2024, 109.2: 022231.